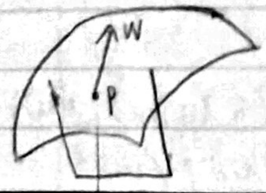
Μάθημα 13ο

Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή



Η πρώτη θεμελιώδης μορφή της S στο p είναι η τετραγωνική μορφή $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w\rangle$

$\langle w_1, w_2\rangle_p = \frac{1}{2}\{ I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)\}$

$\langle\ ,\ \rangle_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$

Αν $x: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με $p \in x(U)$ τότε $\{x_u(x^{-1}(p)), x_v(x^{-1}(p))\}$ βάση του T_pS. Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς τη βάση $\{x_u, x_v\}$ είναι ο $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ όπου $E, F, G : U \to \mathbb{R}$.

Θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης, $F = \langle x_u, x_v\rangle$, $E = \|x_u\|^2 = \langle x_u, x_u\rangle$

$G = \|\ v\|^2 = \langle x_v, x_v\rangle$

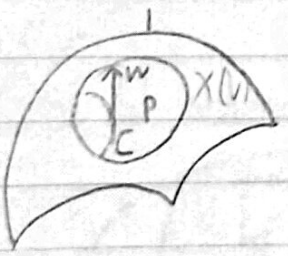
$$\left.\begin{array}{l} I_p(w) \geq 0, \quad \forall w \in T_pS \\ \text{και } I_p(w) = 0 \iff w = 0 \end{array}\right\} \text{ θετικώς οριστική}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E > 0 \\ EG - F^2 > 0 \\ G > 0 \end{cases}$$

$\|x_u \times x_v\|^2 = \|x_u\|^2 \|x_v\|^2 - \langle x_u, x_v\rangle^2$

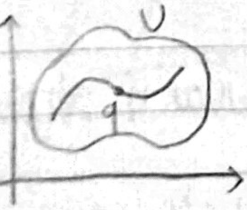
$0 < \|x_u \times x_v\|^2 = EG - F^2$

$w \in T_pS \quad w = c'(0), \quad c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, \quad c(0) = 1.$



$c = x \circ \beta, \quad \beta(t) = (u(t), v(t))$

$\beta(0) = q = x^{-1}(p)$



$c(t) = x(u(t), v(t))$

$w = u'(0)\, x_u(q) + v'(0)\, x_v(q)$

$I_p(w) = \|u'(0) x_u + u'(0) x_v\|^2 = \|x_u\|^2 (u'(0))^2 + 2\langle x_u, x_v\rangle u'(0) v'(0)$
$+ \|x_v\|^2 (v'(0))^2$

$I_p(w) = E(u'(0))^2 + 2Fu'v' + G(u'(0))^2$

$w = a\,X_u + b\,X_v$

$I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$

Μήκος καμπύλης

$C: I \subseteq \mathbb{R} \to X(U)$

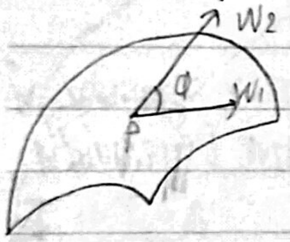
$C(t) = X(u(t), v(t))$

$C' = u'X_u + v'X_v$

$$L_a^b(C) = \int_a^b \|C'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\langle C'(t), C'(t)\rangle}\,dt = \int_a^b \sqrt{I_{C(t)}(C'(t))}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{E(u(t),v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t),v(t))\,u'(t)\,v'(t) + G(v'(t))^2}\,dt$$

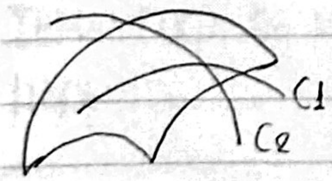
Γωνία διανυσμάτων



$w_1, w_2 \in T_pS - \{0\}$

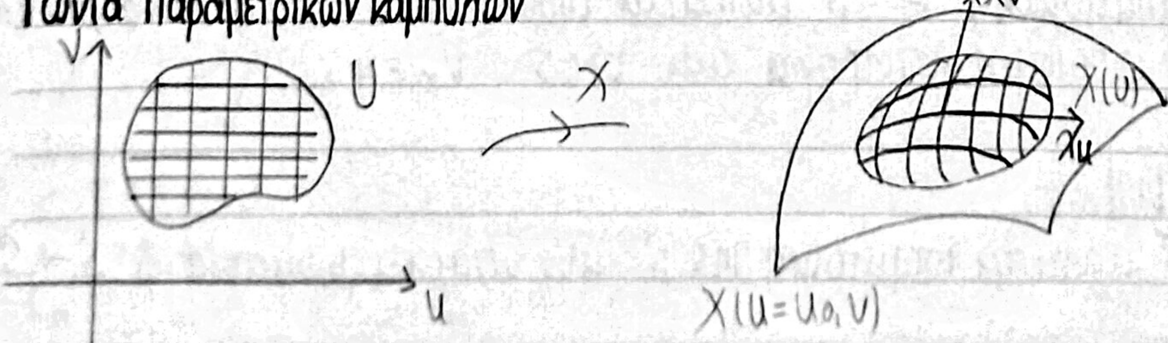
$$\cos\varphi = \frac{\langle w_1, w_2\rangle}{\|w_1\|\,\|w_2\|} = \frac{\langle w_1, w_2\rangle}{\sqrt{I_p(w_1)}\sqrt{I_p(w_2)}}$$

Γωνία τεμνόμενων καμπυλών



είναι εξ ορισμού η γωνία των διανυσμάτων ταχύτητας.

Γωνία παραμετρικών καμπυλών

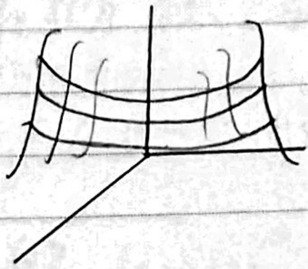


$$\cos\varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \, \|X_v\|} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Οι παραμετρικές καμπύλες τέμνονται υπό ορθή γωνία μόνο αν $F=0$

Το σύστημα συντεταγμένων X καλείται **ορθογώνιο** ανν $F=0$

π.χ. επιφάνεια εκ περιστροφής



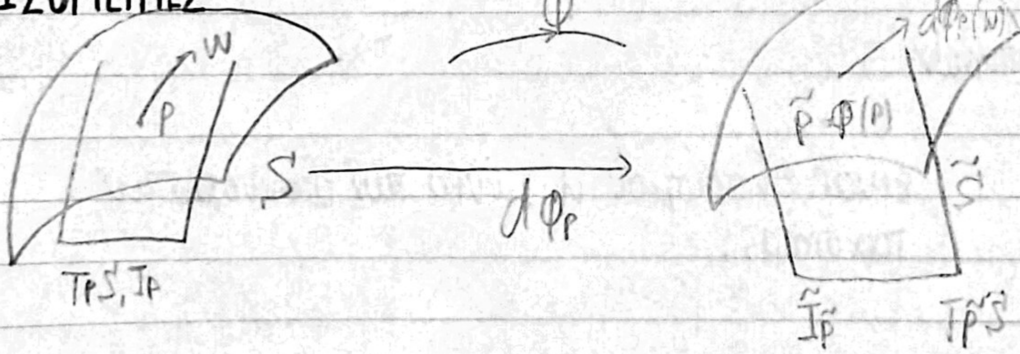
Εμβαδόν χωρίου

Υποθέτω ότι R είναι χωρίο το οποίο περιέχεται στην περιοχή συντεταγμέν $X(U)$.

$$\text{Εμβαδό}(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| \, du\,dv = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, du\,dv.$$

Εσωτερική γεωμετρία μιας κανονικής επιφάνειας είναι η μελέτη των εννοιών ή ιδιοτήτων της επιφάνειας που εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ



ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $\Phi: S \to \tilde{S}$ καλείται ισομετρία ανν είναι διαφορίσιμη 1-1 επί με διαφορίσιμη αντίστροφο και $\forall p \in S$, $\forall w \in T_pS$

$I_p(w) = \tilde{I}_{\tilde{p}}(d\Phi_p(w))$.

Η επιφάνεια $\tilde{S}$ καλείται ισομετρική της S ανν υπάρχει ισομετρία $\Phi: S \to \tilde{S}$

① Κάθε επιφάνεια S είναι ισομετρική με τον εαυτό της (διότι η $Id: S \to S$
$Id(p)=p$ είναι ισομετρία)

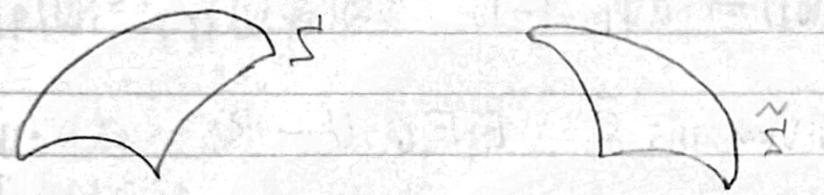
② Αν $\tilde{S}$ ισομετρία με S τότε και η S είναι ισομετρική με $\tilde{S}$
(η αντίστροφη ισομετρίας είναι ισομετρία)

③ $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } S_1 \text{ ισομετρική της } S_2 \\ \text{και } S_2 \quad '' \quad \text{της } S_3 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1$ ισομετρική της S_3
(σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία)

ΕΡΩΤΗΜΑ: Πότε δύο επιφάνειες είναι ισομετρικές?

ΠΡΟΤΑΣΗ: Δύο γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες είναι ισομετρικές. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω S, $\tilde{S}$ είναι γεωμ. ισότιμες επιφάνειες, δηλαδή υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\tilde{S} = T(S)$



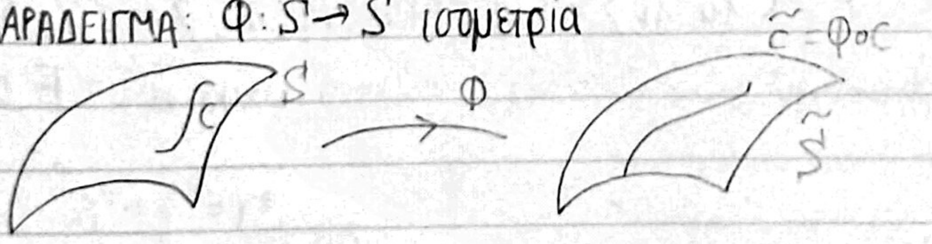
$\Phi: S \to \tilde{S}$
$\Phi = T|S$

$T = T_v \circ A$

$d\Phi = dA = A$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Οι ισομετρίες διατηρούν ότι ορίζεται μέσω της πρώτης θεμελιώδους μορφής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\Phi: S \to \tilde{S}$ ισομετρία



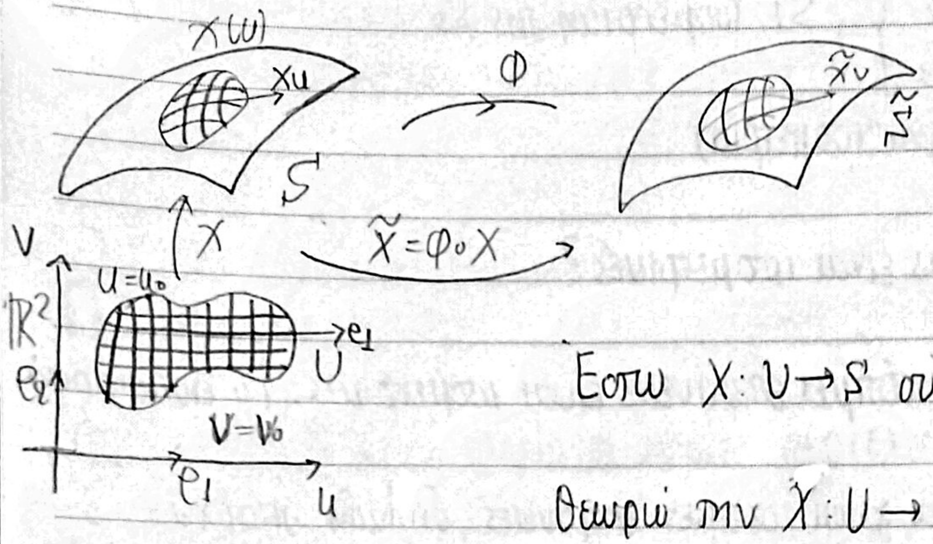
$c: I \subset \mathbb{R} \to S$

$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\, dt$

$$L_a^b(\tilde{c}) = \int_a^b \|\tilde{c}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{I}_{\tilde{c}(t)}(\tilde{c}'(t))}\,dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{I}_{\varphi(c(t))}(d\varphi(c'(t)))}\,dt$$

$$\overset{\varphi \text{ ισομ.}}{\Longrightarrow} L_a^b(\tilde{c}) = L_a(c)$$

Εστω $\varphi : S \to \tilde{S}$ ισομετρία



Εστω $X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων της S

Θεωρώ την $\tilde{X} : U \to \tilde{S}$ με $\tilde{X} = \varphi \circ X$

Από την $I_p(w) = \tilde{I}_{\tilde{p}}(d\varphi_p(w)) \Rightarrow d\varphi_p$ "1-1"

Η $\tilde{X}$ είναι σύστημα συντεταγμένων της $\tilde{S}$. $E, F, G : U \to \mathbb{R}$

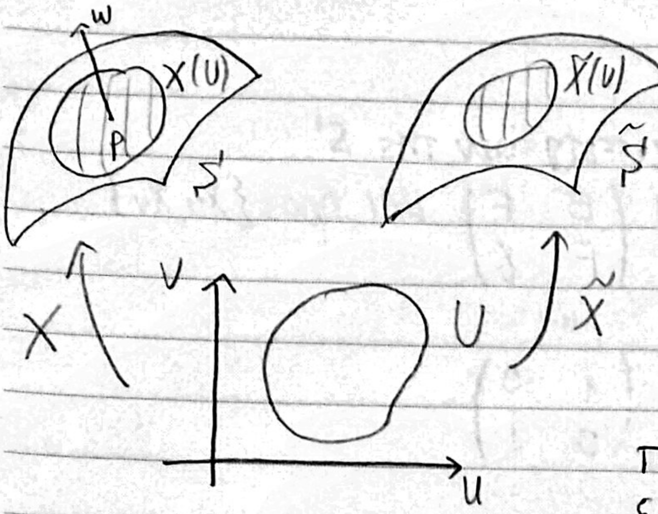
$E = \|X_u\|^2$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = \|X_v\|^2$

$\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G} : U \to \mathbb{R}$, $\tilde{E} = \|\tilde{X}_u\|^2$, $\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle$, $\tilde{G} = \|\tilde{X}_v\|^2$

$\tilde{E} = \|\tilde{X}_u\|^2 = \|d(\varphi \circ X)(e_1)\|^2 = \|d\varphi\, dX(e_1)\|^2 = \|d\varphi(X_u)\|^2$

$= \|X_u\|^2 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{E} = E \\ \tilde{F} = F \\ \tilde{G} = G \end{cases}$

$\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = \langle d\varphi(X_u), d\varphi(X_v) \rangle = \langle X_u, X_v \rangle$
$= F$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $X: U \to S$ και $\tilde{X}: U \to \tilde{S}$ συστήματα συντεταγμένων. Αν τα θεμελιώδη ποσά E, F, G της S ως προς το X και $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ της $\tilde{S}$ ως προς το $\tilde{X}$ πληρούν $\tilde{E} = E$, $\tilde{F} = F$, $\tilde{G} = G$ τότε η απεικόνιση $\tilde{X} \circ X^{-1} : X(U) \to \tilde{X}(U)$ είναι ισομετρία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\varphi = \tilde{X} \circ X^{-1}$ είναι διαφορομορφισμός ως σύνθεση διαφορομορφισμών

$$\varphi \circ X = \tilde{X}$$

$$\begin{cases} d\varphi(X_u) = \tilde{X}_u \\ d\varphi(X_v) = \tilde{X}_v \end{cases}$$

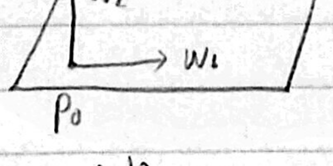
$$I_p(w) = \tilde{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

$$w = aX_u + bX_v$$
$$I_p(w) = Ea^2 + 2Eab + Gb^2$$

$$d\varphi_p(w) = d\varphi_p(aX_u + bX_v) = a\tilde{X}_u + b\tilde{X}_v \Rightarrow$$

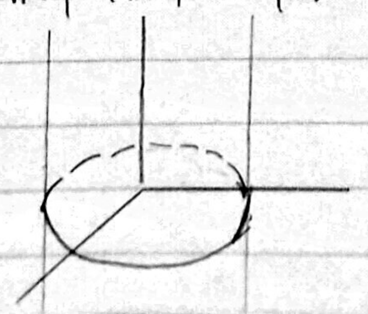
$$\tilde{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \tilde{E}a^2 + 2\tilde{F}ab + \tilde{G}b^2 = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: S:



είναι το επίπεδο που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλο προς τα ορθομοναδιαία διανύσματα w_1, w_2

$\tilde{S}$: $x^2 + y^2 = r^2$



$X: \mathbb{R}^2 \to S'$

$X(u,v) = P_0 + uw_1 + vw_2$ είναι σύστημα συντεταγμένων της S'.

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή έχει πίνακα $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ ως προς $\{X_u, X_v\}$

$E = \|X_u\|^2 = \|w_1\|^2 = 1$

$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 1$

$\tilde{X}(u,v) = (r\cos u, r\sin v, v)$ $\quad (u,v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ σύστημα συντεταγμένων

$\tilde{E} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle = r^2$

$\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = 0$ $\quad$ ενώ $\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{G} = \|X_v\|^2 = 1$

Αν $\tilde{X}(u,v) = \left(r\cos \frac{u}{r}, r\sin \frac{v}{r}, v \right)$ βγαίνει $\begin{pmatrix} 1 = r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(u,v) \in \left(0, \frac{2\pi}{r} \right) \times \mathbb{R}.$